

EXPLORANDO PADRÕES NO 6.º ANO DO ENSINO BÁSICO

Joana Silva

Smart Academia de Estudos

joanasilva1989@hotmail.com

Ema Mamede

Universidade do Minho

emamede@ie.uminho.pt

Resumo

Este artigo aborda os padrões com alunos do 6.º ano do Ensino Básico, analisando as seguintes questões: 1) Como entendem os alunos tarefas envolvendo padrões de repetição e de crescimento, em contexto de sala de aula? 2) Que dificuldades manifestam na resolução destas tarefas? Implementaram-se 8 tarefas de continuação e exploração de sequências na aula de matemática. Adota-se uma metodologia de investigação qualitativa sendo que a recolha de dados recai sobre gravação com vídeo das aulas, fotografias dos trabalhos dos alunos, anotações escritas do professor e fichas de trabalho realizadas pelos alunos. Os alunos mostraram-se capazes de continuar e criar padrões, formular generalizações, e investigar ordens e termos em sequências. Estabeleceram ainda relações matemáticas entre as sequências, fundamentaram as suas resoluções, e desenvolveram o pensamento algébrico.

Palavras-chave: padrões, pensamento algébrico, resolução de problemas.

Abstract

This article analyses the use of patterns with 6th graders, addressing two questions: 1) How do students understand the tasks involving repeating and growth patterns, in the classroom? 2) What difficulties do they manifest when solving these tasks? An intervention was carried out to implement 8 tasks to complete and explore sequences in math class. Qualitative research methods were used and data collection was based on video recording, photographs of students' work, written field notes and students' worksheets. Students proved to be able to complete and create patterns, make generalizations, and investigate orders and terms in sequences. They also established mathematical relationships between the sequences, based their resolutions and developed their algebraic thinking.

Keywords: patterns, algebraic thinking, problem solving.

Résumé

Cet article traite des motifs avec des élèves de la 6e année de l'enseignement de base, analyser les questions suivantes: 1) Comment comprendre les étudiant de tâches impliquant des motifs répétitifs et de la croissance, dans le contexte de la classe? 2) Quelles sont les difficultés manifestent dans la résolution de ces tâches? Ils ont mis en place des 8 tâches de continuation et exploration des séquences en classe de mathématiques. Adopte une méthodologie de recherche qualitative et la collecte de données sur l'enregistrement tombe avec des leçons de vidéo, des photographies de travaux d'élèves, des notes écrites de l'enseignant et des feuilles de travail effectuées par les étudiants. Les étudiants se sont avérés être en mesure de continuer et créer des régularités, faire des généralisations, et d'enquêter sur les commandes et les conditions dans les séquences. Pourtant établi des relations mathématiques entre les séquences, en fonction de leurs résolutions, et développé la pensée algébrique.

Mots-clés: régularités, la pensée algébrique, la résolution de problèmes.

Resumen

Este artículo analiza los patrones con los estudiantes del sexto año de la educación básica, el análisis de las siguientes preguntas: 1) Cómo los estudiantes entienden las tareas relacionados con los patrones de crecimiento y de repetición en el contexto del aula? 2) Qué dificultades se manifiestan en la resolución de estas tareas? Llevaron a cabo 8 tareas de continuación y exploración de secuencias en clase de matemáticas. Adopta una metodología de investigación cualitativa. La recogida de datos cae en la grabación con lecciones en video, fotografías de trabajos de alumnos, notas escritas del maestro y hojas de trabajo de alumnos. Los estudiantes demostraron ser capaces de continuar y crear patrones, hacer generalizaciones, y investigar las órdenes y los términos en las secuencias. Sin embargo han establecido relaciones matemáticas entre las secuencias, basaron sus resoluciones, y han desarrollado el pensamiento algebraico.

Palabras clave: patrones, pensamiento algebraico, resolución de problemas.

Introdução

A sociedade atual exige que os nossos alunos desenvolvam capacidades e aptidões para utilizarem a matemática de forma eficiente no seu cotidiano. Isto requer a formação de indivíduos matematicamente competentes, capazes de responder positivamente aos desafios permanentes com que defrontam no mercado de trabalho. Vale e Fonseca (2011) asseguram que “o principal objetivo do ensino da matemática é desenvolver nos alunos capacidades de generalização numa extensa variedade de circunstâncias, não apenas com números mas também com formas e no espaço” (p. 77).

No que concerne aos documentos orientadores nacionais oficiais, no Programa de Matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007) já salientava a importância que a escola detém em oferecer aos alunos uma formação que lhes possibilite compreender e usar a matemática ao longo da escolaridade e posteriormente, na profissão, na vida pessoal e em sociedade. Este documento defendia, ainda, que esta formação devia incentivar os alunos a estabelecer uma relação positiva com a disciplina, destacando a importância de promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento de capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados (DGIDC, 2007). Mais recentemente, o Programa de Matemática para o Ensino Básico (DGE, 2013) destaca que a apreensão e hierarquização de conceitos matemáticos, o estudo sistemático das suas propriedades e a argumentação clara e precisa têm um papel primordial na organização do pensamento, constituindo-se como uma gramática basilar do raciocínio hipotético-dedutivo. O trabalho desta gramática contribui para alicerçar a capacidade de elaborar análises objetivas, mas também para a capacidade de argumentar, de justificar adequadamente uma dada posição e de detetar falácias e raciocínios falsos em geral. O Programa de Matemática em vigor (ver DGE, 2013) ressalta que o raciocínio matemático é por excelência o raciocínio hipotético-dedutivo, embora o raciocínio indutivo desempenhe também um papel fundamental, uma vez que preside, em Matemática, à formulação de conjecturas. Os alunos devem ser capazes de estabelecer conjecturas, em alguns casos, após a análise de um conjunto de situações particulares.

No contexto de desenvolvimento de capacidades relevantes para se ser matematicamente competente, os padrões assumem especial importância. Vale e Fonseca (2011) consideram que os padrões são um tema imperioso na aquisição de capacidades e processos matemá-

ticos, tais como resolução de problemas, comunicação matemática e raciocínio matemático, considerados no Programa de Matemática (DGIDC, 2007) e no Programa de Matemática para o Ensino Básico (DGE, 2013) como capacidades transversais a desenvolver nos alunos ao longo do ensino básico, em todos os anos de escolaridade e em todos os tópicos de matemática. Para as autoras, os padrões oferecem aos alunos a oportunidade de desenvolver conhecimentos matemáticos, na medida em que lhes permitem relacionar diferentes conceitos e conteúdos em contextos distintos. Os padrões constituem uma ferramenta poderosa no ensino e aprendizagem da matemática do ensino básico, em particular na promoção do pensamento algébrico e aprendizagem da Álgebra.

Sobre o conceito de padrão

De acordo com Orton (2005), umas das dificuldades em definir padrão reside no facto da palavra ter uma variedade de significados diferentes, podendo por exemplo ser usada para referir uma disposição particular ou arranjo de formas, cores ou sons onde se detetam regularidades. O termo padrão é de difícil definição, mas da literatura podemos depreender que se associa a termos como regularidade, sequência, ordem e estrutura.

O conceito “padrão é usado quando nos referimos a uma disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons onde se detectam regularidades” (Vale, Palhares, Cabrita & Borralho, 2006, p. 194). Estes autores depreendem, através de outros estudos, que termos como regularidades, sequência, motivo, regra e ordem encontram-se ligados ao conceito de padrão.

Relativamente aos tipos de padrões existentes, Orton (2005) considera que se podem distinguir padrões dentro do campo geométrico, onde o tipo de regularidade assenta na ideia de simetria, ou ainda dentro do campo numérico (sequência numérica). Vale e Pimentel (2009) distinguem padrões de repetição e de crescimento afirmando: “um padrão de repetição é um padrão no qual há um motivo identificável que se repete de forma cíclica indefinidamente” e “nos padrões de crescimento, cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior. Há padrões de crescimento lineares e não lineares, ou seja, cuja tradução algébrica pode ser feita, ou não, através de uma expressão polinomial do 1º grau” (p.14). Zazkis e Liljedahl (2012) dividiram-nos da seguinte for-

ma: padrões numéricos, padrões geométricos, padrões em procedimentos computacionais, padrões lineares e quadráticos, e padrões repetidos. Mas, mais do que ressaltar a diversidade de classificações de tipos de padrões existentes na literatura, interessa aqui centrar a atenção nos contextos em que os padrões podem surgir.

Este trabalho aborda maioritariamente padrões de repetição. Os diferentes contextos em que podem surgir são relevantes, destacando-se em particular os contextos numéricos e figurativos. Conhecer as reações dos alunos a tarefas sobre padrões, centrar a atenção no seu modo de pensar durante a resolução de tarefas específicas sobre padrões ajuda a alargar o conhecimento sobre aquilo que é possível abordar em sala de aula.

Os padrões e o ensino da matemática

Trabalhar os padrões é permitir aos alunos o contacto com uma matemática significativa e uma envolvimento na sua própria aprendizagem, recorrendo às suas realidades e experiências. Para Devlin (2002), os padrões constituem a essência da matemática, na medida em que “O que o matemático faz é examinar “padrões” abstractos – padrões numéricos, padrões de formas, padrões de movimento, padrões de comportamento, etc. [...]” (p. 9).

É fundamental e pertinente o trabalho com padrões no ensino da matemática, dado que estes apelam fortemente ao desenvolvimento do sentido estético e da criatividade, possibilitam aos alunos o estabelecimento de várias conexões entre os diferentes temas, desenvolvem a capacidade de classificar e ordenar informação bem como a compreensão da ligação entre a Matemática e o mundo em que vivem (Vale & Pimentel, 2009). O estudo de padrões conduz os alunos à descoberta de conexões e à criação de generalizações e previsões. Em sala de aula, o trabalho com padrões é um contexto excelente para o desenvolvimento de conceitos matemáticos e, paralelamente, permitir preparar os alunos para aprendizagens posteriores, além de desenvolver capacidades de resolução de problemas, raciocínio e comunicação (Vale, Palhares, Cabrita & Borralho, 2006; Vale & Pimentel, 2009).

Brocardo, Delgado, Mendes, Rocha e Serrazina (2006) defendem que as crianças devem ter oportunidade de con-

tactar com experiências algébricas desde a educação de infância, de forma a favorecer um futuro estudo mais formalizado da Álgebra e a contribuir para uma contínua formulação de generalizações. Os padrões, em particular os de repetição, constituem um tema de grande interesse na educação pré-escolar na medida em que servirão no futuro de suporte para a aprendizagem da Álgebra. Esta ideia é também partilhada por Vale, Palhares, Cabrita e Borralho (2006) que defendem que a aprendizagem da Álgebra deve ser iniciada no jardim-de-infância, com recurso à investigação de padrões que sejam estimulantes, promovendo a análise e descrição dos mesmos.

No desenvolvimento do pensamento algébrico impõe-se abordar a Álgebra através da resolução de problemas envolvendo padrões, pois a investigação de padrões é uma estratégia poderosa de resolução de problemas, sendo que “a resolução de problemas não rotineiros e não tradicionais é um poderoso caminho que envolve os alunos na exploração e formalização de padrões, levando-os a conjecturar, a verbalizar relações entre os vários elementos do padrão e a generalizar” (Vale & Pimentel, 2009, p. 10). Vale e Fonseca (2011) consideram que os padrões oferecem aos alunos a oportunidade de desenvolver conhecimentos matemáticos, na medida em que lhes permitem relacionar diferentes conceitos e conteúdos em contextos distintos. Neste sentido, os padrões são um tema imperioso na aquisição de capacidades e processos matemáticos, tais como resolução de problemas, comunicação matemática e raciocínio matemático destacados no Programa de Matemática (DGIDC, 2007) e no documento Princípios e Normas para a Matemática Elementar (NCTM, 2007).

Sobre o tipo de tarefas a explorar com as crianças, Barratta-Lorton (1995) afirma que a capacidade de reconhecer e usar padrões constitui uma valiosa ferramenta na resolução de problemas e pode ainda ter um efeito profundo no desenvolvimento da compreensão matemática da criança. Considera que deve haver oportunidades de experimentar padrões na forma visual, auditiva e física, e atribui ainda grande importância à verbalização de padrões. A autora propõe atividades variadas com padrões enfatizando a transposição de padrões para outras formas, a observação de semelhanças e de diferenças, a análise e comparação de padrões, o reforço da progressão da esquerda para a direita, o raciocínio dedutivo, a conexão de ideias abstratas com o mundo real, a produção e verificação de conjecturas, além da reprodução e extensão e/ou criação de padrões.

Frobisher e Threlfall (2005) defendem que as crianças, nos primeiros anos de trabalho com padrões, desenvolvem capacidades para descrever, completar e criar

padrões, transformar uma expressão escrita numa simbólica, ou vice-versa, prolongar um padrão para resolver problemas, explicar a generalização associada a um padrão e usar os padrões para estabelecer relações. Também Garrick, Threlfall e Orton (2005) argumentam que a exploração de tarefas que envolvem regularidades, em grupo ou individualmente, constituem oportunidades para as crianças serem desafiadas a verbalizar as suas percepções e incentivadas a expor os seus conhecimentos, desenvolvendo assim a comunicação matemática. Sobre este aspeto, a investigação recomenda que o professor proporcione aos seus alunos tarefas ricas que permitam encontrar regularidades, possibilitem o levantamento de conjecturas, o confronto de ideias, o desenvolvimento da capacidade de argumentação através de justificações válidas e coerentes, o desenvolvimento da capacidade de comunicação e raciocínio matemáticos (ver Vale & Pimentel, 2009; Vieira & Ferreira, 2009). Neste sentido, e em concordância com Vale e Pimentel (2009), torna-se assim essencial que os alunos sejam incentivados a descrever, por palavras suas, um padrão e a justificar a forma como o continuam ou constroem, com o objetivo de desenvolver a comunicação matemática. Para as autoras, esta vivência é extremamente benéfica para as crianças, pois permite o conhecimento das variadas formas de continuação que um padrão pode ter.

Por forma a fomentar o desenvolvimento do pensamento algébrico, Vale e Pimentel (2009) asseveram que se impõe trabalhar a álgebra através da resolução de problemas envolvendo padrões, visto que a investigação de padrões é uma estratégia possante de resolução de problemas e referem que “a resolução de problemas não rotineiros e não tradicionais é um poderoso caminho que envolve os alunos na exploração e formalização de padrões, levando-os a conjecturar, a verbalizar relações entre os vários elementos do padrão e a generalizar” (p. 10). Também Vieira e Ferreira (2009) afiançam que os alunos devem ter possibilidade de promover o pensamento algébrico, uma vez que as capacidades algébricas são essenciais em toda a escolaridade e na vida ativa.

No entanto, os professores devem estar conscientes que os alunos podem não estar motivados para a aprendizagem dos padrões ou que há alunos com mais aptidões que outros para a compreensão de padrões. O papel do professor pode constituir-se aqui determinante para o desenvolvimento da motivação nos seus alunos. Threlfall (2005) argumenta que o modo como a abordagem aos padrões e o respetivo ensino são efetuados influencia diretamente a aprendizagem dos alunos. Para o autor, o trabalho de repetição de padrões constitui-se relevante ponto de partida. Assim que os padrões numéricos são

introduzidos, por exemplo, as capacidades básicas e o conhecimento têm de estar bem estabelecidos antes que exista alguma possibilidade das crianças estarem capazes de generalizar ou formular regras em padrões apresentados. Também Orton e Orton (2005) acreditam que, relativamente à aprendizagem de padrões, existem dois fatores que a influenciam diretamente: “o nível de dificuldade concetual do assunto em questão, e a motivação e a atitude dos alunos” (p. 104). Segundo estes autores, o grau de abstração dos alunos é um enorme condicionante à compreensão de conceitos matemáticos, uma vez que existem crianças que simplesmente não conseguem atribuir sentido a aspetos essenciais da matemática. O facto de este ensino não ser associado a experiências significativas das crianças conduz a que esse nível de abstração dificilmente seja alterado. Similarmente, a atribuição de significados intrínsecos às atividades e aos materiais afeta diretamente a aprendizagem dos alunos. Assim sendo, o professor parece possuir aqui um papel crucial como mediador entre alunos e conhecimento, na medida em que deve tornar as aprendizagens significativas. No seguimento deste pensamento, Vale, Palhares, Cabrita e Borralho (2006) acentuam a ideia de que os professores devem conceber atividades significativas, experimentais e com utilização de objetos manuseáveis para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Deste modo, estas tarefas devem permitir a identificação, a criação e a continuação de padrões e o trabalho com diferentes propriedades das relações. Vale e Pimentel (2009) defendem que o professor deve proporcionar tarefas que maximizem a capacidade de aprendizagem dos alunos e que lhes ofereçam a oportunidade de usar múltiplas representações de um padrão, de descobrir padrões, prever termos, generalizar e construir sequências e de descrever padrões oralmente e por escrito. Os padrões podem sugerir abordagens numéricas, visuais e mistas (Orton, 2005). Os alunos devem, desde os primeiros anos de escolaridade, ser encorajados a observar padrões e a representá-los geométrica e numericamente, começando a estabelecer conexões entre a geometria e a aritmética. Relativamente às tarefas algébricas, Brocardo, Delgado, Mendes, Rocha e Serrazina (2006) atestam que estas podem surgir da recriação de um problema com uma solução simples, possibilitando a elaboração de padrões, conjecturas, generalizações e relações matemáticas. “A variação da forma como se apresenta um problema pode conduzir a que um problema aritmético simples se transforme numa questão algébrica” (p. 77). As autoras referem que as tarefas devem permitir que os alunos descubram um número para diferentes casos antes de produzirem uma regra geral,

o resultado para um número pequeno e, posteriormente, para um número suficientemente grande, de forma a conduzi-los para a libertação das estratégias de contagem e de desenho. Para Vale (2012), o ensino precisa propor tarefas desafiantes que enfatizem compreensão da generalização, através dos seus aspetos numéricos e figurativos, capitalizando a capacidade inata dos alunos de pensar visualmente. Fomentar as representações visuais dos alunos pode passar por levá-los a exprimir o que veem através de outras formas de representação, como sejam, descrever padrões em tabelas utilizando expressões numéricas adequadas (Vale, 2012).

As tarefas com padrões podem facultar aos alunos oportunidades para observar e verbalizar as suas próprias generalizações e traduzi-las numa linguagem mais formal, ajustada à idade. Vale (2012) refere que a generalização envolve pensamentos de ordem superior como sejam por exemplo o raciocínio, a abstração, ou a visualização. Assim, a seleção das tarefas é crucial se se pretendem criar experiências de resolução de problemas que permitam aos alunos fazer generalizações. A exploração de tarefas de padrões centrada apenas na identificação do que se repete/cresce, ou na continuidade dos padrões pode ser limitativa.

No âmbito de tarefas de padrões, o Programa de Matemática para o Ensino Básico (DGE, 2013) em vigor, para a Álgebra do 6.º ano, nos conteúdos de “Sequências de regularidades”, destaca a importância de: determinar termos de uma sequência definida por uma lei de formação recorrente ou por uma expressão geradora; determinar expressões geradoras de sequências definidas por uma lei de formação recorrente; resolver problemas envolvendo a determinação de uma lei de formação compatível com uma sequência parcialmente conhecida.

Torna-se assim relevante estudar como estes assuntos podem ser explorados em sala de aula. Importa conhecer o efeito dos padrões na motivação dos alunos nas aulas de matemática, na implicação com o sucesso na resolução de problemas e na promoção do pensamento algébrico. Este estudo procura perceber como crianças do 6.º ano de escolaridade exploram e compreendem os padrões. Para tal, tentar-se-á encontrar resposta às seguintes questões: 1) Como entendem os alunos tarefas envolvendo padrões de repetição e de crescimento, em contexto de sala de aula? 2) Que dificuldades manifestam os alunos na resolução destas tarefas sobre padrões matemáticos?

Metodologia

Neste estudo adotou-se uma metodologia de investigação qualitativa, tendo sido desenvolvida uma intervenção com características próximas do modelo de investigação-ação. Bogdan e Bicklen (1994) argumentam que a investigação qualitativa é caracterizada por decorrer num ambiente natural que se constitui fonte direta de dados, sendo o investigador o instrumento principal. O entendimento que o investigador tem dos materiais registados, por ele revistos na sua totalidade, constitui assim um instrumento-chave de análise. Esta investigação caracteriza-se ainda por ser descritiva, sendo que os investigadores tentam analisar os dados recolhidos em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto possível, a forma em que estes foram registados ou transcritos. Tendencialmente, esta análise de dados possui um carácter fortemente indutivo. Neste tipo de investigação, o interesse está no processo mais do que simplesmente nos resultados ou produtos. McMillan e Schumacher (2001) afirmam que a investigação qualitativa tem por base o processo no qual os investigadores recolhem dados em situações de interação entre os intervenientes nos seus ambientes naturais. Esta opção recai ainda sobre a ausência de caminhos preestabelecidos que atribuem um carácter flexível a este tipo de investigação.

Abraçar um modelo próximo da investigação-ação torna-se essencial quando o contexto é a análise de práticas de sala de aula. Esta é uma investigação participativa, colaborativa e que surge normalmente da procura pela clarificação de preocupações geralmente partilhadas por um grupo. Para Kemmis e McTaggart (1992), “investigação-ação significa planificar, atuar, observar e refletir mais cuidadosamente, mais sistematicamente e mais rigorosamente do que aquilo que fazemos todos os dias” (p. 16). A investigação-ação pode ser realizada por apenas um professor, ou um grupo de professores da mesma escola e pode ser utilizada em diversas áreas, em métodos de ensino e estratégias de aprendizagem, sendo que esta metodologia é situacional, colaborativa, participativa e autoavalia-se (Cohen, Manion & Morrison, 2001). Assim, a implementação das tarefas deste estudo cumpriu os quatro passos fundamentais - observar, planejar, intervir e refletir – do modelo de investigação-ação (ver Cohen, Manion & Morrison, 2001; Kemmis & McTaggart, 1992).

Foi planeada uma intervenção em sala de aula em que as aulas foram lecionadas pela professora/investigadora, uma das autoras deste artigo. A intervenção foi conduzida junto de uma turma de 28 alunos do 6.º ano de

uma escola E.B. 2 e 3, no centro da cidade de Braga. Na turma não existiam alunos com Necessidades Educativas Especiais.

As tarefas propostas neste estudo recaíram sobre a continuação de sequências, indicação na lei de formação de sequências, tipos de sequências, determinação de termos de sequências e investigação de sequências. As Figuras 1 e 2 apresentam exemplos de algumas das tarefas de continuação e determinação de termos de sequências abordadas na intervenção.



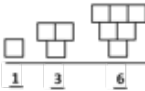
1. Observa as seguintes sequências e desenha os três termos seguintes.
- 1.1.  _____
- 1.2.  _____
- 1.3.  _____
1 3 6 - - -
- 1.4. **25, 22, 19, 16,** _____

Figura 1 – Tarefa 1 de continuação de sequências apresentada na intervenção.

2. Observa a seguinte sequência:
- 47, 49, 51, 53, 55, ...**
- 2.1. Qual é o primeiro termo desta sequência? E o quarto? _____
- 2.2. Indica os próximos quatro termos da sequência. _____
- 2.3. Indica a lei de formação da sequência. _____
- 2.4. Será que o 86 pode ser um termo desta sequência? Porquê? _____

Figura 2 – Exemplo de tarefa de continuação e determinação de termos de sequência.

A intervenção ocorreu durante duas semanas e foram implementadas três aulas, assumindo o conteúdo das Regularidades como assunto fundamental. No final de cada intervenção, procedeu-se à reflexão da implementação das tarefas, das aulas, das dificuldades dos alunos determinando assim as tarefas a implementar na sessão seguinte. Na primeira aula foram apresentadas três tarefas, sendo que a primeira e a segunda englobavam quatro questões cada, a terceira era composta por três questões. Os padrões eram de repetição e de crescimento, do tipo numéricos, geométricos e ilustrativos. Os padrões de repetição eram compostos por dois, três ou quatro termos

que se repetiam. Os alunos deviam observar e continuar sequências, identificar a lei de formação, averiguar se determinados termos pertenciam às sequências e identificar e descobrir termos da sequência apresentada e continuá-la. A segunda intervenção foi constituída por duas tarefas, com quatro questões cada. Os alunos deviam desenhar os termos seguintes, descobrir e explicar a lei de formação das sequências, encontrar os termos correspondentes a determinadas ordens, averiguar a possibilidade de certos termos pertencerem às sequências e determinar as respetivas ordens. As duas sequências apresentadas eram do tipo ilustrativas e geométricas, ambas de crescimento. A terceira intervenção era composta por três tarefas, com três, uma e quatro questões cada. Os alunos deviam continuar padrões, explicar o seu raciocínio, determinar termos da sequência, averiguar a possibilidade de certos termos pertencerem às sequências e determinar as respetivas ordens, e investigar o crescimento da sequência para permitir a formulação de generalizações. As três sequências apresentadas eram do tipo numéricas e geométricas, de crescimento. Na primeira aula, o trabalho desenvolveu-se individualmente na realização de fichas de trabalho, seguindo-se uma partilha de resoluções com o colega de mesa, terminando com a correção em grande grupo. Nas duas últimas aulas, os alunos trabalharam a pares, onde cada par deveria partilhar ideias e resolver as tarefas em conjunto. A recolha de dados foi efetuada através de gravações com vídeo e fotografias, de anotações escritas do investigador e das resoluções escritas dos alunos. Esta diversidade de instrumentos de recolha de informação procurou assegurar a veracidade e fidelidade dos dados recolhidos. Na análise dos dados utilizaram-se nomes fictícios como forma de proteger o anonimato dos participantes do estudo.

Resultados

Aula 1

A primeira intervenção iniciou-se com um diálogo com os alunos sobre o tema a ser trabalhado. Questionaram-se as crianças sobre os seus conhecimentos prévios acerca do tema Regularidades. Vários alunos participaram ativamente nesta troca de ideias, revelando que a turma conhecia o tema, apesar de alguns aspetos estarem já ligeiramente esquecidos, como foi o caso dos tipos de sequências.

A discussão continuou com o relembrar de tipos de sequências.

Os alunos compreenderam de forma rápida as diferenças entre os tipos de sequências existentes e deram exemplos de sequências possíveis para cada tipo, de forma voluntária e organizada. Em alguns exemplos, foram desafiados no sentido de classificarem essa sequência e indicarem alguns dos termos pertencentes à mesma. Numa das sequências, um aluno questionou a professora quanto à lei de formação, pelo que se aproveitou a sua intervenção para abordar este conceito com a turma. Este momento evidencia bem a envolvimento e a reflexão do aluno sobre o assunto. Esta situação conduziu a que toda a turma também pensasse no tema e discutisse sobre qual era a lei de formação das sequências apresentadas, envolvendo-se ativamente na troca de ideias. Após este momento, os alunos realizaram individualmente uma ficha de trabalho de forma individual (ver Figura 1). A correção foi feita inicialmente aos pares e depois em grande grupo. Os alunos realizaram sem dificuldades a tarefa, à exceção da terceira questão. A maioria dos alunos atentou apenas aos números e, por ter efetuado mal os cálculos, errou a sequência por completo. Os alunos admitiram que a diferença entre os termos consecutivos era 3 e continuaram a sequência com base nessa lei de formação, obtendo os termos 1, 3, 6, 9, 12 e 15. Depois de terem descoberto a sequência numérica, desenharam as figuras com base nos termos obtidos, sem atenderem às figuras existentes (ver Figura 3).

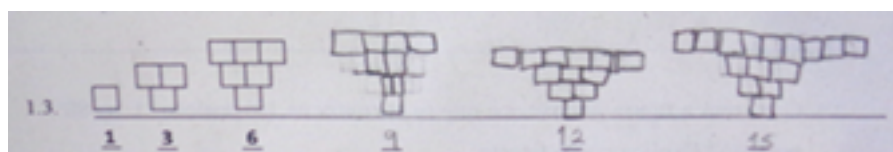


Figura 3 – Resolução incorreta de um aluno.

Foi claro que estes alunos não associaram as imagens aos números, pois, se vissem que o algarismo representava o número de quadrados da figura, tinham percebido que algo estava incorreto entre a sequência numérica e as imagens. No momento da correção, chamou-se à atenção para a importância da observação da sequência no seu todo e não apenas de um elemento em particular. Na Tarefa 2 (ver Figura 2), a turma não mostrou constrangimentos e consideraram as quatro alíneas “muito fáceis”. Na questão 2.4, os alunos apresentaram diferentes justificações (ver Figuras 4 e 5).

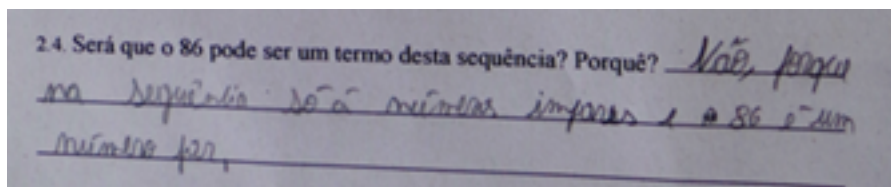


Figura 4 – Justificação correta apresentada por um aluno.

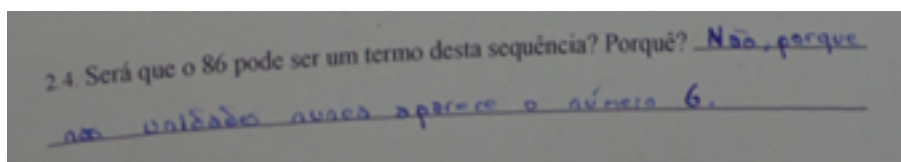



Figura 5 – Justificação correta apresentada por um aluno.

No final da última questão e após os alunos responderem de forma correta, discutiram-se outros números, como o 733 ou o 200, sendo que os alunos não manifestaram qualquer dificuldade em responder corretamente. A investigadora pediu que lhe dessem exemplos de número que pertencessem àquela sequência e rapidamente surgiram respostas como 77 e 2013. Foi claro o entusiasmo dos alunos, o que mostra que compreenderam a atividade e que se envolveram verdadeiramente no problema. No momento do debate, os alunos levantaram o braço para intervir e respeitaram as opiniões uns dos outros. Quando alguma resolução não estava correta, eles detetavam e explicavam aos colegas como deviam ter feito. A Tarefa 3 era constituída por três questões baseadas numa sequência geométrica de repetição (Figura 6). Na correção da questão 2, desenhou-se no quadro a sequência mas com um triângulo agudo, para ver a reação dos alunos. Foi curioso ver que muitos retificaram, dizendo que não podia ser aquele triângulo porque não era igual ao da sequência inicial. Um aluno afirmou mesmo que “assim, a sequência não é válida! Tem de desenhar os termos direitinhos”. Este facto revelou que os alunos estavam atentos à atividade e que

compreenderam que o rigor no desenho dos termos é imprescindível para a validade das sequências.

3. Observa a seguinte sequência:



3.1. Qual é o terceiro termo desta sequência? _____

3.2. Indica os próximos quatro termos da sequência. _____

3.3. Qual será a figura geométrica que se encontra na 19ª posição? E na 88ª posição? Explica como fizeste. _____

Figura 6 – Tarefa 3 apresentada aos alunos.

A questão 3.3 da Tarefa 3 foi a que mais causou discussão na realização e respetiva correção. No momento da correção em grande grupo, um aluno foi ao quadro explicar a sua resolução centrada na estratégia de contagem para a primeira questão. Aqui, chamou-se à atenção para os erros que alguns alunos cometeram por não fazerem a contagem corretamente. Outro aluno expôs que “como o grupo que se repete é composto por três termos e o primeiro é um triângulo, contei 1, 4, 7, 10, 13 e vi que nestas posições calhava sempre um triângulo, por isso a figura geométrica da 19ª posição é o triângulo”. Um outro referiu que “pensei na tabuada do 3 e sabia que 3×6 é 18, que era um círculo. Como queria a 19ª posição, era andar mais um termo na sequência, que era o triângulo”. Relativamente à questão 3.2, mais de metade da turma referiu ter recorrido à contagem para responder à questão. Como forma de sensibilizá-los para a existência de outra estratégia mais eficiente, perguntou-se-lhes como resolveriam se fosse pedido o 765º termo da sequência. Ficaram muito admirados e originou-se o seguinte debate (ver Transcrição 1):

Transcrição 1 – Discussão dos alunos sobre estratégia para encontrar o 765º termo.

José: Era impossível!

Daniel: Contávamos na mesma...

Marta: Contávamos?! Eu não quero ficar aqui até agosto!

Joaquim: Não, fazíamos pela tabuada do 3 porque o grupo que se repete tem três termos diferentes. Encontrávamos um número que multiplicado por 3 desse 765 ou perto disso.


Muitos alunos não tinham percebido. Então, o Joaquim disse para pensarem como viram a 19ª posição, só que desta vez o número era maior. Um outro aluno, que ainda não tinha intervindo nos debates, pediu para expor a sua resolução no quadro e afirmou que “a sequência tem três termos e eu sei que 3×10 é 30 e que o círculo calhava no último termo. Então, 3×20 é 60, 3×30 é 90 e, como

eu queria o 88, fiz 3×29 que é 87. Depois foi só avançar um termo, obtendo o 88, que é o triângulo”. Muitos alunos disseram que tinham respondido o quadrado e, após verificar as resoluções, constatou-se que todos fizeram por contagem um por um e tinham cometido erros durante a mesma.

Aula 2

Nesta aula selecionaram-se duas tarefas com quatro questões cada, com duas sequências de crescimento, uma pictórica e outra geométrica. Após ter realizado uma leitura da Tarefa 1 (ver Figura 7), algumas crianças afirmaram que era muito fácil, enquanto outras disseram que “nunca vamos descobrir quantos pontos tem a figura 100”. O ambiente criado em sala de aula durante este tipo de trabalho foi de grande envolvimento dos alunos permitindo a troca de ideias, a partilha de estratégias de resolução, obrigando os alunos a escutar e respeitar as opiniões dos outros. A primeira questão foi resolvida e explicada no quadro, por uma aluna (Figura 8) e não suscitou dúvidas na turma.

1. Observa os primeiros quatro termos da seguinte sequência:



1.1. De que modo se pode construir o termo seguinte? Quantos pontos terá? _____

1.2. Quantos pontos terá o 100º termo? Explica como fizeste. _____

1.3. Existe alguma figura com 86 pontos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde. _____

1.4. Existe alguma figura com 125 pontos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde. _____

Figura 7 – Tarefa 1 proposta na Aula 2.

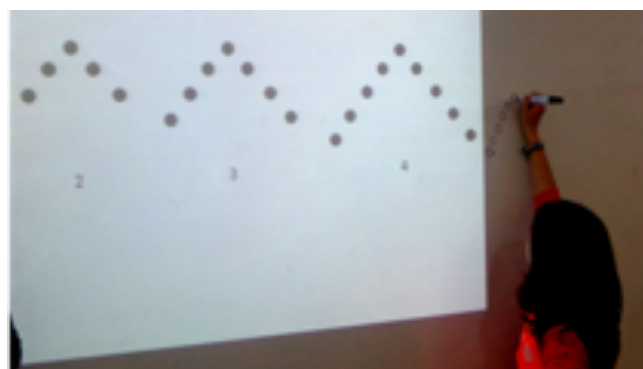


Figura 8 – Resolução da questão 1 da Tarefa 1 por uma aluna no quadro.

Na resolução da questão 1.2, os debates foram muitos porque os alunos reconheceram que tinham de descobrir a lei de formação para poder atingir o 100º termo e foram várias as estratégias para descobri-la. Surgiram explicações como “o número do termo corresponde ao número de pontos que existe no lado direito da imagem, não contando com o ponto do topo. O número de pontos do lado esquerdo é mais um do que o número de pontos do lado direito.”; “eu multipliquei o número do termo da figura por dois, adicionei uma unidade a esse resultado e obtive o número total de pontos da imagem. Por isso, para o termo 100 fiz: $100 \times 2 = 200$; $200 + 1 = 201$.”; ou ainda “eu vi que o número do termo mais o número do termo seguinte era igual ao número de pontos desse termo. Por exemplo, o número de pontos do termo 2 é igual ao número desse termo, que é 2, mais o número do termo seguinte, que é 3. Ou seja, $2 + 3 = 5$, que é o número de pontos do 2º termo. Então, o número de pontos do 100º termo é $100 + 101$, que é igual a 201.”. Um aluno que tem algumas dificuldades a Matemática expôs aos colegas, apoiado na imagem da sequência que estava projetada no quadro, que “o primeiro tem dois pontos do lado esquerdo, o segundo tem três, o terceiro tem quatro e o quarto tem cinco, então o cem tem cento e um. Depois, do lado direito o primeiro tem um, o segundo tem dois e o terceiro tem três, por isso o cem vai ter cem”. O empenho e a participação demonstrados por este aluno foram surpreendentes pois, trata-se de um aluno desmotivado para a aprendizagem da Matemática, consequência dos resultados não satisfatórios que obtém.

Os alunos discutiram este problema, durante a realização a pares e na correção em grande grupo, de forma empenhada e entusiasmada. Durante a correção com a turma, dois alunos estabeleceram o seguinte diálogo (Transcrição 2):

Transcrição 2 – Diálogo entre dois alunos na resolução da questão 1.2.

Maria: O 100º termo terá 201 pontos. Para chegarmos a esta resposta, somamos os 200 pontos laterais... [é interrompida pelo André]

André: E como é que sabes que são 200?

Maria: Porque é $100 + 100$.

André: E como é que sabes que é $100 + 100$?

Maria: Porque, por exemplo, no termo 3, tem 3 pontos de cada lado sem contar com o de cima. Então, a figura 100 tem 100 de cada lado mais o de cima.”

André: Ah, já percebi!

Os alunos que não tinham conseguido realizar esta tarefa compreenderam a explicação dos colegas, os que tinham pensado de outra forma queriam explicar a sua estratégia e os que tinham realizado a tarefa daquela forma estavam a explicar a outros como tinham feito. Gerou-se um momento de

empolgação e de ânimo na turma. Pediu-se então aos alunos que anotassem todas as estratégias descobertas para aquela questão, para que tomassem consciência da variedade de resoluções existentes para um mesmo problema. Utilizou-se ainda este momento para chamar a atenção para o número de resoluções que descobriram, comprovando que não existe apenas uma solução para um problema.

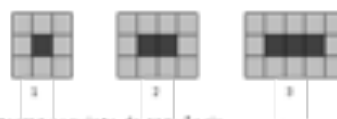
Na questão 1.4, “Existe alguma figura com 125 pontos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde.”, os alunos compreenderam que existia uma figura com 125 pontos porque “todas as figuras têm um número de pontos ímpar”, mas não sabiam como determinar a sua ordem. Uma aluna explicou a sua resolução no quadro, acompanhada de um desenho (Figura 9), referindo “eu pensei que, tirando o ponto de cima, somando as duas diagonais, dava 124 pontos. Se dividirmos o 124 por 2, vai-nos dar o número de pontos que existe em cada diagonal.”, utilizando a expressão diagonal referindo-se às laterais do V invertido desenhado pelo conjunto de pontos da figura.



Figura 9 – Resolução apresentada à turma na resolução da questão 1.4.

Na Tarefa 2, a turma sentiu mais dúvidas na questão 2.3 (Figura 10). Um aluno corrigiu, no quadro, a tarefa de desenhar o termo seguinte da sequência. Os alunos não mostraram dúvidas nesta tarefa, mas tiveram dificuldades em explicar a lei de formação. Tal como na primeira aula, os constrangimentos ao nível da comunicação matemática estiveram evidentes.

2. Observa a seguinte sequência:



2.1. Desenha o termo seguinte da sequência.

2.2. Indica a lei de formação da sequência. _____

2.3. Quantos quadrados cinzento-escuros tem a 30ª figura? E cinzento-claros? Explica como foste. _____

2.4. Será que existe alguma figura que tenha 97 quadrados cinzento-claros? Porquê? _____

Figura 10 – Tarefa 2 proposta na aula2.

Perante esta dificuldade, a turma foi incentivada a usar termos adequados e a refletir sobre a forma como pensou para encontrar a solução. Em conjunto, construíram-se respostas modelo com as ideias dos alunos. Estes momentos foram fundamentais para familiarizar os alunos com a prática de responderem de forma completa às questões de desenvolvimento. Não foi fácil dado tratar-se de uma dificuldade que quase todos os alunos possuem, mas é um trabalho que deve ser desenvolvido regularmente.

Aula 3

Iniciou-se a aula pela correção das últimas duas questões da Tarefa 2 da aula anterior. Na questão 2.3, um aluno foi ao quadro explicar a sua resolução:

Tiago: “Na primeira figura, temos um quadrado escuro e por cima temos um quadrado claro mais dois dos lados. Então, se imaginássemos que na trigésima figura tínhamos trinta quadrados escuros, por cima tínhamos 30 quadrados claros e acrescentávamos mais dois dos lados. Ficávamos com 32. Fazíamos 32×2 , porque tem 32 quadrados em cima e em baixo, que dá 64. Por fim, acrescentávamos mais dois, que correspondem aos dos lados, que dá 66.”

Foi notório o desenvolvimento da capacidade de comunicar deste aluno ao longo das aulas, que inicialmente tinha imensas dificuldades em expressar o seu raciocínio e, nesta exposição, mostrou a sua evolução. Na questão 2.4, os alunos não tiveram dúvidas quando um deles explicou que “não existe nenhuma figura com 97 quadrados claros porque o número de quadrados claros é sempre par e o 97 é um número ímpar”.

Em seguida, nesta aula realizaram-se três tarefas, compostas por três, uma e três questões cada. As sequências eram numéricas e geométricas, todas de crescimento. Na Tarefa 1 foi dada a sequência numérica aos alunos “1, 18, 3, 16, 5, 14, 7, ...”. Na questão 1.1 pedia-se “Escreve os quatro termos seguintes da sequência. Explica como pensaste.” Uma aluna explicou a estratégia que “continuamos a sequência pensando que o primeiro número é ímpar e o segundo é par. A seguir, junta-se mais dois ao primeiro número, subtrai-se dois ao segundo número, de forma alternada e assim sucessivamente.”. Como não havia resoluções diferentes, os alunos foram desafiados a averiguar o que acontece entre os termos consecutivos. O Romeu afirmou “do 1 para o 18 é +17, do 18 para o 3 é -15, do 3 para o 16 é +13, do 16 para o 5 é -11. O que acontece é que soma-se e subtrai-se, e vai baixando sempre dois.”. Foi ao quadro explicar melhor como tinha pensado e apresentou a resolução da Figura 11.

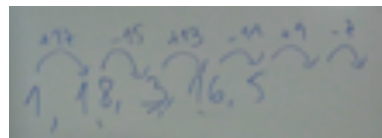


Figura 11 – Resolução escrita do Romeu na questão 1.1.

2. Se numerarmos de 1 a 5 os vértices da estrela indicada na figura e em seguida percorrermos a estrela no mesmo sentido, colocando o número 6 no vértice 1, o número 7 no vértice 2, o número 8 no vértice 3 e assim sucessivamente até ao número 2007, em que vértice fica o último número? Justifica o teu raciocínio.



Figura 12 – Tarefa 2 proposta na aula 3.

Na Tarefa 2 (ver Figura 12), uma das alunas explicou que “através do enunciado, eu soube que o número 6 ia calhar no vértice 1, o 7 no 2, o 8 no 3, o 9 no 4 e o 10 no 5. Eu vi que $1 + 5 = 6$, $2 + 5 = 7$ e assim sucessivamente. Descobri que todos os números terminados em 2 e 7 calham no vértice 2. Se o número 2007 termina no 7, fica no vértice 2.”

Na Tarefa 3 foi dada a sequência da Figura 13, e começou por se pedir desenhassem o 5.º termo da sequência, em seguida que indicassem quantos triângulos equiláteros teria a 48ª figura. Os alunos não tiveram dificuldade nestas resoluções. Na questão 3.3 perguntava-se sobre o número de segmentos de reta de igual tamanho que formavam a 20ª figura, e em seguida a 73ª figura. A solução não foi imediatamente atingida, tendo surgido várias discussões e dúvidas partilhadas entre os alunos. Até que a Cátia explica:

Cátia: “Eu vi que a figura 1 tem um segmento na horizontal e dois na diagonal, dando três no total, a figura 2 tem dois segmentos na horizontal e três na diagonal, dando cinco no total. Então, conclui que o número de segmentos na horizontal é igual ao número da figura e o número de segmentos na diagonal é o número da figura mais um. Somando esses dois, obtemos o número total de segmentos da figura.”.

O raciocínio da aluna foi excelente e a forma de exposição foi irrepreensível, expressou-se muito bem e fez com que os colegas compreendessem a resolução. Surgiu outra estratégia, igualmente correta e de fácil compreensão, explicada pela Sara “eu somei o número do 1º termo pelo seguinte, $1 + 2 = 3$, que corresponde ao número de segmentos de reta do 1º termo. Depois, $2 + 3 = 5$, que é o número de segmentos do 2º termo. Então, se quero o 20º termo, o seguinte é o 21º, faço $20 + 21 = 41$, que indica o número de segmentos do 20º termo.”.

Mais uma vez, as tarefas apresentadas revelaram ter sido adequadas aos conhecimentos da turma e suscitavam à investigação e à procura de diversas estratégias de resolução. N processo de resolução das tarefas, os alunos não só tiveram oportunidade de desenvolver a sua capacidade de resolver problemas, como estimularam a sua capacidade de raciocinar e de comunicar na aula de matemática.

Notas finais

As tarefas apresentadas neste estudo incluíam atividades de observação, continuação e criação de padrões, de averiguação da possibilidade de determinados termos pertencerem a uma sequência, atividades de investigação de determinadas ordens de um padrão e atividades de investigação de novos padrões. Os alunos deveriam analisar a lei de formação das sequências, ampliá-las, verificar se determinados termos se incluíam nas mesmas, averiguar ordens de termos das sequências e investigar novos padrões. Foram estudados padrões numéricos, geométricos e pictóricos, de repetição e de crescimento.

Sobre a exploração de padrões na sala de aula, pode dizer-se que os alunos estabeleceram relações matemáticas entre as sequências e outros conteúdos já abordados, formularam generalizações e expuseram e fundamentaram as suas resoluções quando era solicitado mas também por iniciativa própria. Mantiveram sempre uma atitude de investigação ativa e interessada ao longo das aulas, participando nas discussões com os pares, ou em grande grupo, de forma voluntária.

A ideia de que o professor deve promover o pensamento algébrico é partilhada por vários autores (ver Brocardo, Delgado, Mendes, Rocha & Serrazina, 2006; Vale, Palhares, Cabrita & Borralho, 2006; Vale & Pimentel, 2009; Vieira & Ferreira, 2009). O professor deve trabalhar a álgebra através da resolução de problemas envolvendo padrões. O estudo aqui apresentado constitui mais um contributo para o incentivo ao desenvolvimento de aulas de matemática que abordem regularidades, uma vez que a investigação de padrões é uma estratégia possante de resolução de problemas. O documento Princípios e Normas para a Matemática Elementar (NCTM, 2007) assegura que, no 2º Ciclo, os alunos “deverão investigar padrões numéricos e geométricos, e representá-los matematicamente por meio de palavras ou símbolos. Deverão analisar a estrutura do padrão e o modo como este cresce ou varia, organizar esta informação de forma sistematizada e usar a sua análise para fazer

generalizações acerca das relações matemáticas presentes no padrão” (p. 183). As tarefas desenvolvidas durante esta intervenção procuraram promover o espírito investigativo dos alunos, levando-os a estudar as sequências, a descrevê-las, a ampliá-las e a fazer generalizações. Estas tarefas ofereceram-lhes a oportunidade de desenvolver as três capacidades transversais na área da Matemática: resolver problemas, desenvolver a comunicação matemática (oral e escrita) e promover o raciocínio matemático. O desenvolvimento destas três capacidades é importante para a construção de cidadãos matematicamente competentes. Com as tarefas propostas, os alunos foram incentivados a descrever, por palavras suas e pormenorizadamente, as resoluções de cada tarefa, promovendo o desenvolvimento da comunicação matemática. Esta descrição permitiu que a turma tivesse conhecimento das resoluções encontradas para o mesmo problema e as debatessem para aferir a sua validade. O raciocínio matemático esteve igualmente em constante evidência, na medida em que os alunos, inicialmente, justificavam as resoluções de forma simples e elementar, e posteriormente, argumentavam de forma mais complexa e completa, com recurso a linguagem matemática mais rigorosa.

Sobre as dificuldades dos alunos, estas prendem-se com a averiguação de termos de ordem elevada. Perante tarefas destas categorias, a maioria dos alunos não as realizava sozinha ou resolvia-as com falhas, o que revelava pouca experiência com tarefas daquela natureza. Os alunos revelaram ainda constrangimentos ao nível da comunicação matemática, uma vez que usualmente não explicavam detalhadamente a forma como interpretavam os problemas, nem como os resolviam e ao nível do raciocínio matemático, porque as tarefas que habitualmente resolviam só possuíam uma resolução possível. Outro aspeto a destacar prende-se com o facto de, inicialmente, os alunos não estarem motivados a ouvir as soluções dos colegas, querendo apenas dar a conhecer as suas. No final da intervenção, foi notória a facilidade que os alunos detinham na investigação de padrões, especialmente na variedade de estratégias usadas na resolução de problemas, e o entusiasmo na partilha das mesmas.

Foi perceptível a dificuldade dos alunos em expor os seus pensamentos e explicações, pois realizavam as tarefas com estratégias distintas mas não conseguiam apresentá-las. Esta característica não providenciou qualquer desinvestimento desta capacidade transversal, porque se acredita que com trabalho obtêm-se melhores resultados. Em concordância com este pensamento, o documento Princípios e Normas para a Matemática Elementar (NCTM, 2007) afirma que “os alunos que têm

oportunidade, encorajamento e apoio para falar, escrever, ler e ouvir, nas aulas de matemática, beneficiam duplamente: comunicam para aprender matemática e aprendem a comunicar matematicamente” (p. 66).

O trabalho desenvolvido permitiu o contacto com problemas pertinentes através da investigação de padrões e que fomentaram o pensamento algébrico. Os alunos tiveram a possibilidade de elaborar padrões, levantar conjecturas, formular generalizações, estabelecer relações matemáticas e desenvolver a capacidade de argumentar com recurso a justificações válidas. Este trabalho proporciona aos alunos o desenvolvimento de capacidades relacionadas com o pensamento algébrico que servem de suporte ao raciocínio matemático, permitindo aos alunos ir além das meras capacidades de cálculo.

Referências

- Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação. Uma Introdução à Teoria e aos Métodos*. Porto: Porto Editora.
- Brocardo, J., Delgado, C., Mendes, F., Rocha, I. & Serrazina, L. (2006). Números e Álgebra: desenvolvimento curricular. In Isabel Vale, Teresa Pimentel, Ana Barbosa, Lina Fonseca, Leonor Santos & Paula Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores*, pp. 65-92. Lisboa: Secção de Educação Matemática - SPCE.
- Cohen, L., Manion, L. & Morrison K. (2001). *Research Methods in Education*. London: Routledge Falmer.
- Devlin, K. (2002). *Matemática: A Ciência dos Padrões*. Porto: Porto Editora.
- DGE (2013). Programa e Metas Curriculares (Matemática - Ensino Básico), Ministério da Educação e Ciência: Direção-Geral da Educação. Retirado da internet: http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf (29 de setembro de 2015).
- DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Direção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular - Ministério da Educação.
- Frobisher, L. & Threlfall, J. (2005). Teaching and Assessing Patterns in Number in the Primary Years. In Anthony Orton, *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*, pp. 84-103. London: Continuum.
- Garrick, R., Threlfall, J. & Orton, A. (2005). Pattern in the Nursery. In Anthony Orton, *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*, pp. 1-17. London: Continuum.
- Kemmis, S. & McTaggart, R. (1992). *Cómo Planificar la Investigación Acción*. Barcelona: Editorial Laertes.
- McMillan, J. & Schumacher, S. (2001). *Research in Education: A Conceptual Introduction*. New York: Longman.
- National Council Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Orton, A. (2005). Children's Perception of Patterns in Relation to Shape. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*, pp. 149-167. London: Cassell.
- Orton, A. & Orton, J. (2005). Pattern and the Approach to Algebra. In Anthony Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*, pp. 104-120. London: Continuum.
- Threlfall, J. (2005). Repeating Patterns in the Early Primary Years. In Anthony Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*, pp. 18-30. London: Continuum.
- Vale, I. (2012). As tarefas de padrões na aula de matemática: Um desafio para professores e alunos. *Interações*, 20, 181-207.
- Vale, I. & Fonseca, L. (2011). Patterns tasks with geometric transformation in elementary teacher's training: some examples. *Journal of the European Teacher Education Network*, vol. 6, 76-86.
- Vale, I. & Pimentel, T. (2009). *Padrões no Ensino e Aprendizagem da Matemática – Propostas Curriculares para o Ensino Básico*. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo – Projecto Padrões.
- Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I. & Borralho, A. (2006). Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. In Isabel Vale, Teresa Pimentel, Ana Barbosa, Lina Fonseca, Leonor Santos & Paula Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores*, pp. 193-211. Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.
- Vieira, L. & Ferreira, D. (2009). Pensamento Algébrico no 1.º Ciclo. In Ema Mamede (Coord.), *Matemática – Tarefas para o Novo Programa – 1.º Ciclo* (pp. 57-104). Braga: Associação para a Educação Matemática Elementar.
- Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2012). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 379-402.